

信号与系统

第8章 系统的状态变量分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第8章 系统的状态变量分析

8.1 状态变量与状态方程

8.2 连续系统状态方程的建立

8.3 离散系统状态方程的建立

8.4 状态方程的变换域求解

8.5 系统的可控制性和可观测性

8.1 状态变量与状态方程

状态变量分析法概述

连续系统状态方程与输出方程

离散系统状态方程与输出方程

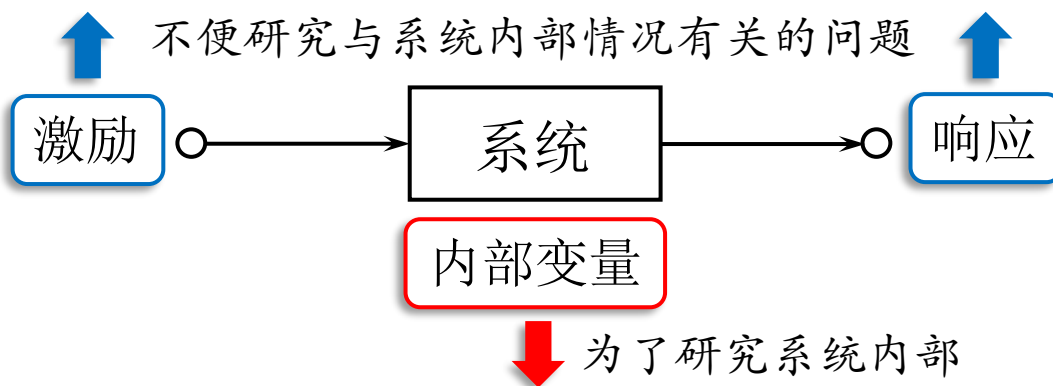
状态方程与输出方程的一般形式

■ 状态变量分析法概述

系统分析的两类方法：输入-输出分析法、状态变量分析法。

➤ 输入-输出分析法

着眼于系统的输入和输出（激励与响应）关系，只关心系统输入端和输出端的变量，不研究系统的内部变量。



➤ 状态变量分析法

现代控制理论的发展对研究系统内部变量提出了要求，加之系统的日益复杂化，以分析内部变量为基础的状态变量分析法应运而生。

■ 状态变量分析法概述

状态变量分析法的特点

- 状态变量分析法**提供系统的内部信息**，能够比较容易地解决与系统内部情况有关的分析设计问题；
- 从数学模型来看，输入-输出法用一个 **n 阶微分/差分方程**描述 n 阶系统，变量只限于输出、输入两个变量；而状态变量法则用**一组一阶微分/差分方程**表征 n 阶系统，为方程中变量的选择带来了极大的灵活性，并为从不同角度反映系统内部状态提供了可能；
- 状态变量分析法不仅**适用于线性时不变、单输入单输出系统**，也**适用于非线性时变、随机、多输入多输出系统分析**；
- 状态变量分析法规律性更强，便于通过计算机分析复杂系统。

■ 连续系统状态方程与输出方程

初始状态

连续系统在 t_0 时刻的状态是最少数目的一组数，知道了这组数和区间 $[t_0, t]$ 上的输入，就可以完全确定系统在 t 时刻的输出，这组数就是初始状态，表示如下：

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)$$

- 电路中初始时刻 t_0 的状态通常指电容电压 $u_C(t_0)$ 和电感电流 $i_L(t_0)$ 。
- 系统状态的数目是一定的， n 阶系统有 n 个初始状态，但状态的选择并不唯一。

■ 连续系统状态方程与输出方程

状态变量 表示状态随时间变化的一组相互独立的变量。

初始状态 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$

状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

状态矢量

状态矢量 由状态变量构成的列矢量 $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

■ 连续系统状态方程与输出方程

状态方程 描述系统状态与输入关系的一阶微分方程组

对 n 阶连续系统，状态方程是由 n 个一阶微分方程组成的方程组。

n 阶系统有 n 个状态 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

p 个输入 $e_1(t), e_2(t), \dots, e_p(t)$

则状态方程的一般形式为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}e_1(t) + b_{12}e_2(t) + \dots + b_{1p}e_p(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}e_1(t) + b_{22}e_2(t) + \dots + b_{2p}e_p(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}e_1(t) + b_{n2}e_2(t) + \dots + b_{np}e_p(t) \end{cases}$$

其中： $\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(t)$

■ 连续系统状态方程与输出方程

状态方程 状态方程的矩阵形式: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = [x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t)]^T & \text{状态矢量} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = [\dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \cdots & \dot{x}_n(t)]^T & \text{状态一阶导数的矢量} \\ \mathbf{e}(t) = [e_1(t) & e_2(t) & \cdots & e_p(t)]^T & \text{激励（输入）矢量} \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n} \quad \text{系统矩阵}$$

$$\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times p} \quad \text{控制矩阵}$$

■ 连续系统状态方程与输出方程

输出方程 描述系统输出、输入、状态之间关系的代数方程组

若 n 阶系统有 q 个输出，输出方程是由 q 个代数方程组成的方程组。

n 阶系统有 n 个状态 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

p 个输入 $e_1(t), e_2(t), \dots, e_p(t)$

q 个输出 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$

则状态方程的一般形式为：

$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}e_1(t) + d_{12}e_2(t) + \dots + d_{1p}e_p(t) \\ y_2(t) = c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \dots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}e_1(t) + d_{22}e_2(t) + \dots + d_{2p}e_p(t) \\ \vdots \\ y_q(t) = c_{q1}x_1(t) + c_{q2}x_2(t) + \dots + c_{qn}x_n(t) + d_{q1}e_1(t) + d_{q2}e_2(t) + \dots + d_{qp}e_p(t) \end{cases}$$

■ 连续系统状态方程与输出方程

输出方程 输出方程的矩阵形式: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t)$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \cdots \ y_q(t)]^T & \text{输出矢量} \\ \mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T & \text{状态矢量} \\ \mathbf{e}(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ \cdots \ e_p(t)]^T & \text{激励（输入）矢量} \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = [c_{ij}]_{q \times n} \quad \text{输出矩阵}$$

$$\mathbf{D} = [d_{ij}]_{q \times p} \quad \text{直达矩阵}$$

■ 离散系统状态方程与输出方程

初始状态

离散系统在 k_0 时刻的状态是最少数目的一组数，知道了这组数和区间 $[k_0, k]$ 上的输入，就可以完全确定系统在 k 时刻的输出，这组数就是初始状态，表示如下：

$$x_1(k_0), x_2(k_0), \dots, x_n(k_0)$$

- 系统状态的数目是一定的， n 阶系统有 n 个初始状态，但状态的选择并不唯一。

■ 离散系统状态方程与输出方程

状态变量 表示状态随时间变化的一组相互独立的变量。

初始状态 $x_1(k_0), x_2(k_0), \dots, x_n(k_0)$

状态变量 $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$

状态矢量

状态矢量 由状态变量构成的列矢量 $\mathbf{x}(k)$

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \quad x_2(k) \quad \dots \quad x_n(k)]^T = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

■ 离散系统状态方程与输出方程

状态方程 描述系统状态与输入关系的一阶前向差分方程组

对 n 阶离散系统，状态方程是由 n 个一阶差分方程组成的方程组。

n 阶系统有 n 个状态 $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$

p 个输入 $e_1(k), e_2(k), \dots, e_p(k)$

则状态方程的一般形式为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ \vdots \\ e_p(k) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(k+1) \qquad \mathbf{A} \qquad \mathbf{x}(k) \qquad \mathbf{B} \qquad \mathbf{e}(k)$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k)$$

■ 离散系统状态方程与输出方程

输出方程 描述系统输出、输入、状态之间关系的代数方程组

若 n 阶系统有 q 个输出，输出方程是由 q 个代数方程组成的方程组。

n 阶系统有 n 个状态 $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$

p 个输入 $e_1(k), e_2(k), \dots, e_p(k)$

q 个输出 $y_1(k), y_2(k), \dots, y_q(k)$

则状态方程的一般形式为：

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ \vdots \\ e_p(k) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}(k) \qquad \mathbf{C} \qquad \mathbf{x}(k) \qquad \mathbf{D} \qquad \mathbf{e}(k)$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k)$$

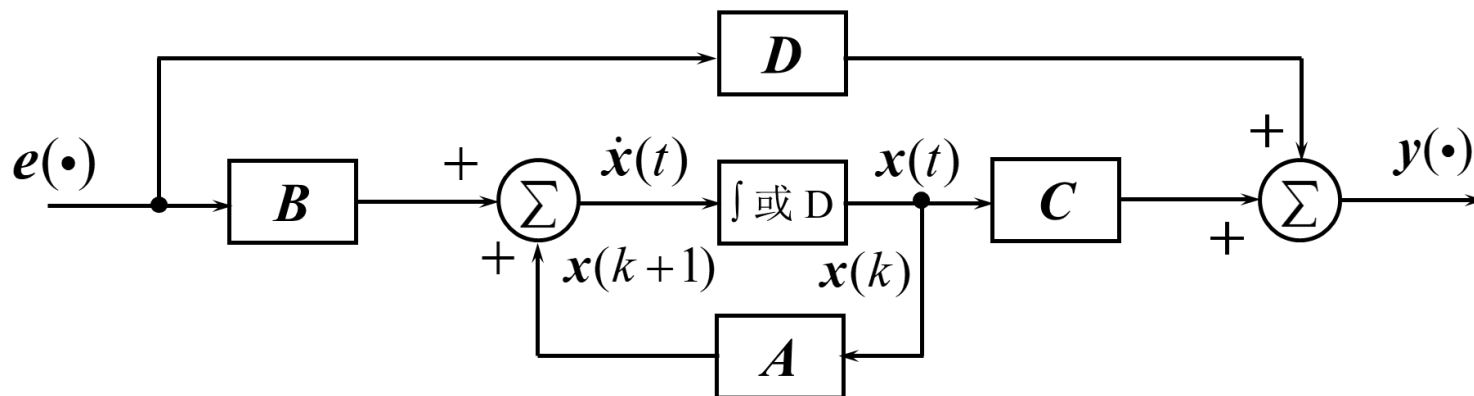
■ 状态方程与输出方程的一般形式

连续系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t) \end{cases}$$

离散系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k) \end{cases}$$



8.2 连续系统状态方程的建立

由RLC电路建立状态方程

由微分方程建立状态方程

由框图/流图建立状态方程

由系统函数建立状态方程

■ 连续系统状态方程的建立

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t) \end{cases}$$

状态方程 $\dot{\mathbf{x}}(t) \sim \mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t)$

刻画状态变量的一阶导数与状态变量、系统输入的关系。

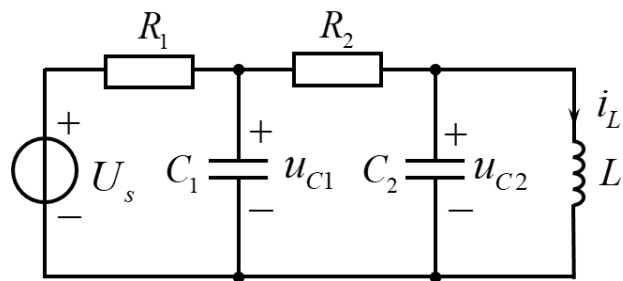
输出方程 $\mathbf{y}(t) \sim \mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t)$

刻画输出变量与状态变量、系统输入的关系。

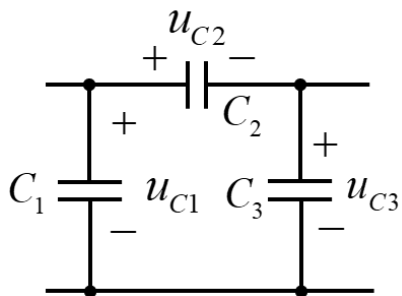
步骤：选取状态变量、列状态方程、列输出方程

■ 由RLC电路建立状态方程

状态变量的选取：独立的电容电压和电感电流。



状态变量： u_{C1} , u_{C2} , i_L



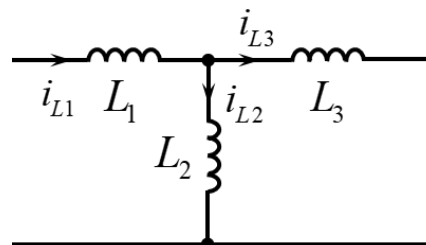
$$u_{C1} + u_{C2} + u_{C3} = 0$$

状态变量：

u_{C1} , u_{C2} 或 u_{C2} , u_{C3} 或 u_{C1} , u_{C3}

u_{C1} , u_{C2} , u_{C3} 只有两个独立变量

任意两个变量可以表示第3个



$$i_{L1} = i_{L2} + i_{L3}$$

状态变量：

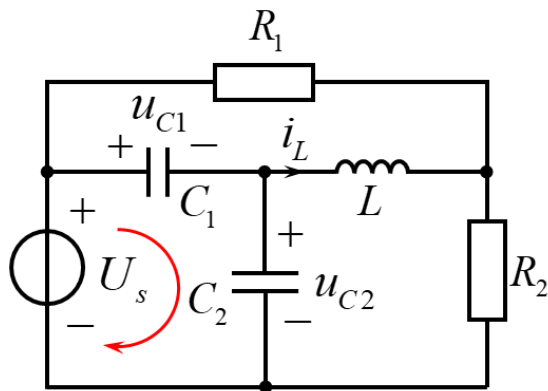
i_{L1} , i_{L2} 或 i_{L2} , i_{L3} 或 i_{L1} , i_{L3}

i_{L1} , i_{L2} , i_{L3} 只有两个独立变量

任意两个变量可以表示第3个

■ 由RLC电路建立状态方程

状态变量的选取：独立的电容电压和电感电流。



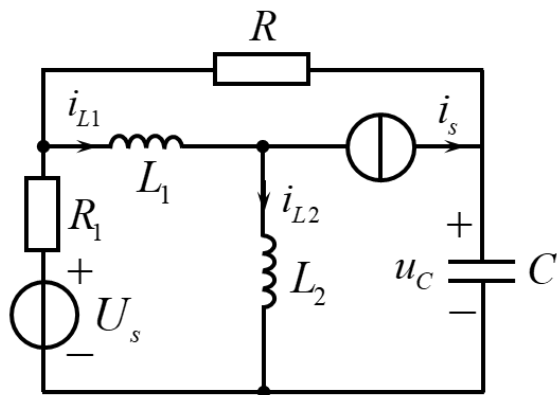
状态变量：

$$u_{C1}, i_L \text{ 或 } u_{C2}, i_L$$

u_{C1}, u_{C2} 只有一个独立变量

$$u_{C1} + u_{C2} = U_s$$

电路中有3个动态原件，但是是一个2阶系统



状态变量：

$$i_{L1}, u_C \text{ 或 } i_{L2}, u_C$$

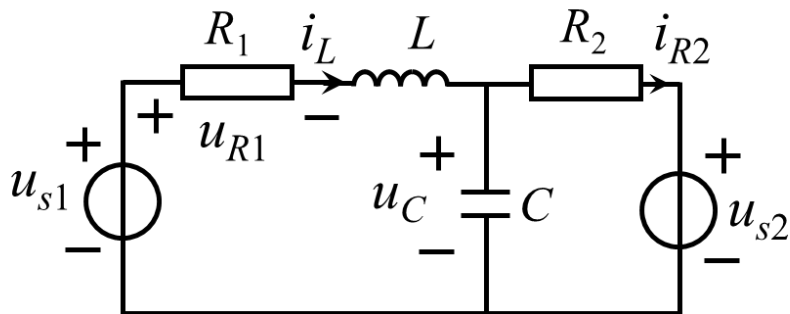
i_{L1}, i_{L2} 只有一个独立变量

$$i_{L1} = i_s + i_{L2}$$

电路中有3个动态原件，但是是一个2阶系统

■ 由RLC电路建立状态方程

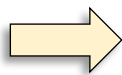
例题1



状态变量 $x_1 = i_L, x_2 = u_C$

输出变量 $y_1 = u_{R1}, y_2 = i_{R2}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_{s1} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2C}x_2 + \frac{1}{R_2C}u_{s2} \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix}$$

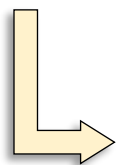
列状态方程

1. 对电感电压列KVL方程:

$$L \frac{d}{dt} i_L(t) + R_1 i_L(t) + u_C(t) = u_{s1}(t)$$

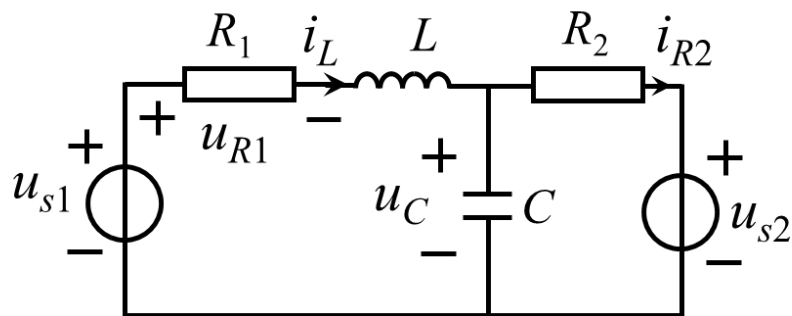
2. 对电容电流列KCL方程:

$$C \frac{d}{dt} u_C(t) + i_{R2}(t) = i_L(t) \quad i_{R2} = \frac{x_2 - u_{s2}}{R_2}$$



■ 由RLC电路建立状态方程

例题1



列输出方程

$$\begin{cases} y_1 = u_{R1} = R_1 i_L = R_1 x_1 \\ y_2 = i_{R2} = \frac{x_2 - u_{s2}}{R_2} \end{cases}$$



状态变量 $x_1 = i_L, x_2 = u_C$

输出变量 $y_1 = u_{R1}, y_2 = i_{R2}$

$$\begin{cases} y_1 = R_1 x_1 \\ y_2 = \frac{1}{R_2} x_2 - \frac{1}{R_2} u_{s2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix}$$

■ 由微分方程建立状态方程

n 阶微分方程 $\rightarrow n$ 个1阶微分方程组成的方程组

例题2 建立下列LTI系统的状态方程和输出方程。

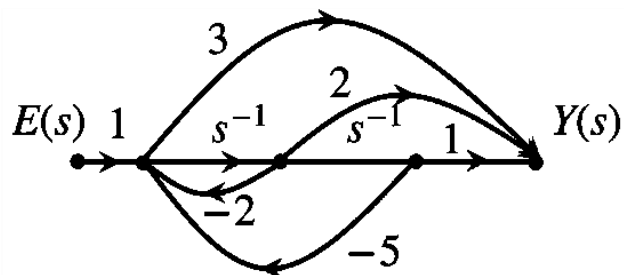
1) $y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e(t)$

2) $y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 6e''(t) + 3e'(t) + 4e(t)$

■ 由框图/流图建立状态方程

- 1) 选积分器 s^{-1} 的输出为状态变量；
- 2) 根据积分器的输入输出关系列写状态方程（输入为输出端求导，可导出状态变量）；
- 3) 根据流图/框图的输出端列写输出方程。

例题3 建立图示LTI系统的状态方程和输出方程。



■ 由系统函数建立状态方程

给定系统函数，可以转化为微分方程、信号流图以及系统框图进行状态变量分析。

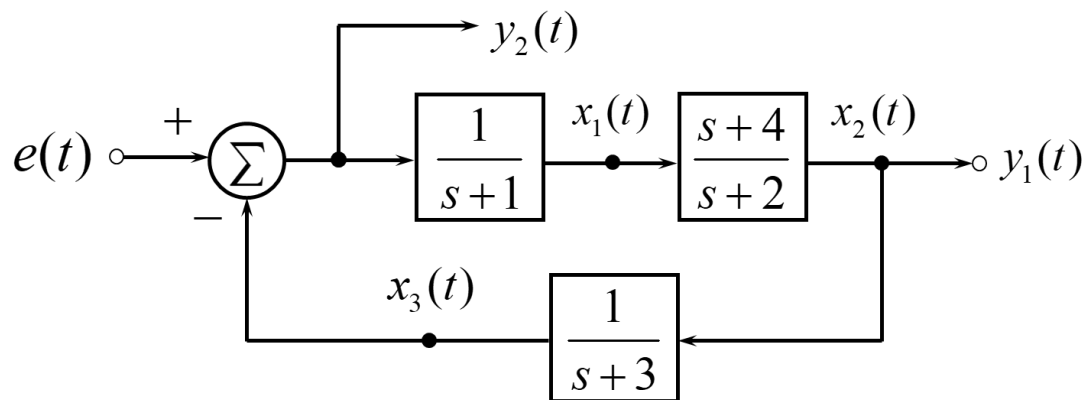
例题4

某LTI连续系统的系统函数为 $H(s) = \frac{2s+8}{s^2+3s+2}$ ，建立它的状态方程和输出方程。

■ 由系统函数建立状态方程

例题5

已知某系统框图如图，状态变量如图所示，试列出其状态方程和输出方程。



8.3 离散系统状态方程的建立

由差分方程建立状态方程

由框图/流图建立状态方程

由系统函数建立状态方程

■ 离散系统状态方程的建立

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k) \end{cases}$$

状态方程 $\mathbf{x}(k+1) \sim \mathbf{x}(k), \mathbf{e}(k)$

刻画状态变量的单位左移与状态变量、系统输入的关系。

输出方程 $\mathbf{y}(k) \sim \mathbf{x}(k), \mathbf{e}(k)$

刻画输出变量与状态变量、系统输入的关系。

步骤：选取状态变量、列状态方程、列输出方程

■ 由差分方程建立状态方程

n 阶差分方程 $\rightarrow n$ 个1阶差分方程组成的方程组

例题6 建立下列LTI系统的状态方程和输出方程。

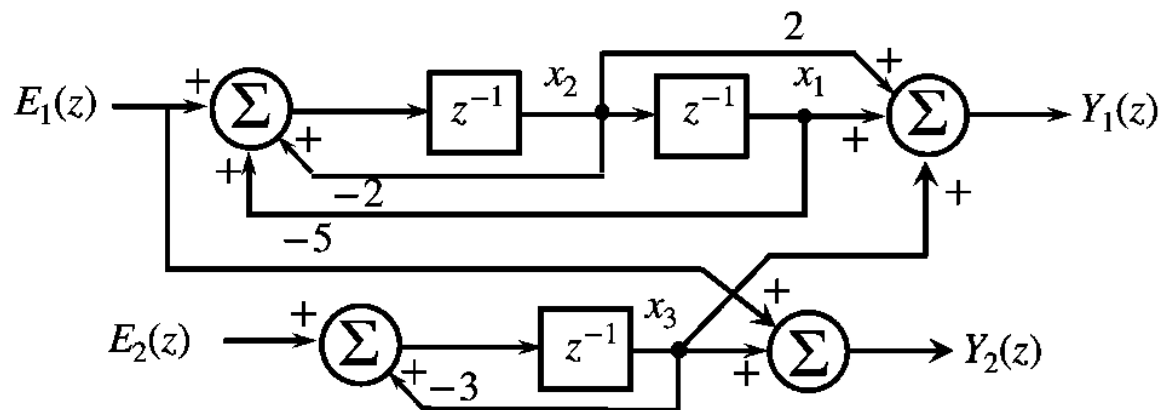
1) $y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) + 5y(k-3) = e(k)$

2) $y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) + 5y(k-3) = 6e(k-1) + 3e(k-2)$

■ 由框图/流图建立状态方程

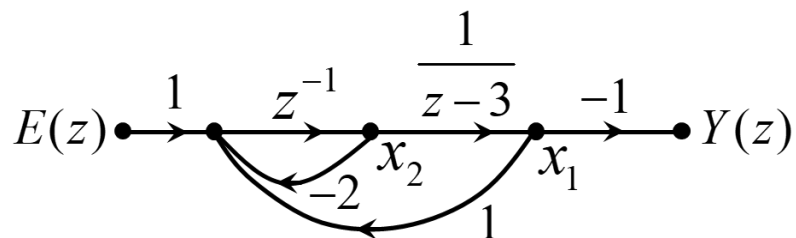
- 1) 选**延时单元** z^{-1} 的**输出**为状态变量；
- 2) 根据每个延时单元的输入输出关系列写状态方程（输入端为输出端的左移，可导出状态变量）；
- 3) 根据流图/框图的输出端列写输出方程。

例题7 建立图示LTI系统的状态方程和输出方程。



■ 由框图/流图建立状态方程

例题8 某LTI离散系统的流图如下，建立其状态方程和输出方程。



■ 由系统函数建立状态方程

给定系统函数，可以转化为差分方程、信号流图以及系统框图进行状态变量分析。

例题9 某LTI离散系统的系统函数为 $H(z) = \frac{9z^3 - 6z^2 + z}{(z - 0.5)^2(z - 0.25)}$ ，用数目最小的延时单元构成此系统，并求解它的状态方程和输出方程。

8.4 状态方程的变换域求解

连续系统状态方程的 s 域求解

离散系统状态方程的 z 域求解

■ 连续系统状态方程的 s 域求解

LTI连续系统的状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t)$$

对方程两端取拉普拉斯变换，结合微分性质：

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0_-) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{E}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0_-) + \mathbf{B}\mathbf{E}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0_-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{E}(s)$$

定义预解矩阵

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$= \underbrace{\Phi(s)\mathbf{x}(0_-)}_{\mathbf{X}_{zi}(s)} + \underbrace{\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{E}(s)}_{\mathbf{X}_{zs}(s)}$$

可得状态变量： $\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}_{zi}(t)] + \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}_{zs}(t)]$

■ 连续系统状态方程的 s 域求解

LTI连续系统的输出方程为：

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t)$$

对方程两端取拉普拉斯变换：

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{E}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0_-) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{E}(s) \quad \Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0_-) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{E}(s)$$

$$= \underline{\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{x}(0_-)} + \underline{[\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{E}(s)}$$

$$\mathbf{Y}_{zi}(s) \quad \mathbf{Y}_{zs}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{E}(s)$$

系统函数矩阵 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathcal{L}[\mathbf{h}(t)]$

可得系统输出： $\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}_{zi}(t)] + \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}_{zs}(t)]$

■ 连续系统状态方程的 s 域求解

LTI连续系统系统函数矩阵与稳定性分析 $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{D}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

不难发现预解矩阵的极点就是系统函数矩阵的极点。

- 当特征方程 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ 的根，即系统极点均位于 s 左开半平面时，连续系统稳定。
- 对 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 列罗斯阵列，当多项式满足罗斯准则时系统稳定。
- 当系统函数矩阵在虚轴上收敛时，系统的频率响应矩阵为

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{H}(s)\big|_{s=j\omega} = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

■ 连续系统状态方程的 s 域求解

LTI连续系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t) \end{cases}$$

预解矩阵

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

状态矢量

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{X}_{zi}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0_-)} \\ \underline{\mathbf{X}_{zs}(s) = \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{E}(s)} \end{cases}$$

和 $\mathbf{E}(s)$ 无关, 和 $\mathbf{x}(0_-)$ 有关

输出矢量

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{Y}_{zi}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{x}(0_-)} \\ \underline{\mathbf{Y}_{zs}(s) = [\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{E}(s)} \end{cases}$$

和 $\mathbf{E}(s)$ 有关, 和 $\mathbf{x}(0_-)$ 无关

系统函数矩阵

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

■ 基础知识复习：方阵的逆矩阵求解

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$$

伴随矩阵
行列式

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

余子式 M_{ij}

矩阵 $\mathbf{A}$ 中删除第 i 行第 j 列元素后所得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式。

二阶方阵的逆：两调一除

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

主对角元素互换，副对角元素变号，除以行列式。

例题10

已知系统方程如下，初始状态 $x_1(0_-)=3, x_2(0_-)=2$ ，输入 $e(t)=\delta(t)$ ，求解系统的预解矩阵、状态变量和输出，并判断系统是否稳定。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + e(t)$$

解： $\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$

$$X(s) = \Phi(s)[x(0_-) + BE(s)] = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \right\} = \begin{bmatrix} \frac{3s+18}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{3s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{12}{s+2} - \frac{9}{s+3} \\ \frac{-6}{s+2} + \frac{9}{s+3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow x(t) = \begin{bmatrix} 12e^{-2t} - 9e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 9e^{-3t} \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

系统极点： $s_1 = -2, s_2 = -3$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12e^{-2t} - 9e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 9e^{-3t} \end{bmatrix} \varepsilon(t) + \delta(t) = 6e^{-2t} \varepsilon(t) + \delta(t)$$

均位于 s 平面左半平面，
系统稳定

■ 离散系统状态方程的 z 域求解

LTI离散系统的状态方程为：

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k)$$

对方程两端取 z 变换，结合移位性质：

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{E}(z)$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{E}(z)$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{E}(z)$$

定义预解矩阵

$$\Phi(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z$$

$$= \underbrace{\Phi(z)\mathbf{x}(0)}_{\mathbf{X}_{zi}(z)} + \underbrace{\Phi(z)z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}(z)}_{\mathbf{X}_{zs}(z)}$$

$$\text{可得状态变量: } \mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}_{zi}(z)] + \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}_{zs}(z)]$$

■ 离散系统状态方程的 z 域求解

LTI离散系统的输出方程为：

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k)$$

对方程两端取拉普拉斯变换：

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{E}(z)$$

$$\mathbf{X}(z) = \boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}(z)z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}(z) \quad \boldsymbol{\Phi}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{E}(z)$$

$$= \underbrace{\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{x}(0)}_{\mathbf{Y}_{zi}(z)} + \underbrace{\left[\mathbf{C}z^{-1}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{E}(z)}_{\mathbf{Y}_{zs}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{E}(z)}$$

系统函数矩阵 $\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}z^{-1}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathcal{Z}[\mathbf{h}(k)]$

可得系统输出： $\mathbf{y}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{Y}(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{Y}_{zi}(k)] + \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{Y}_{zs}(k)]$

■ 离散系统状态方程的 z 域求解

LTI离散系统系统函数矩阵与稳定性分析 $\Phi(z) = (zI - A)^{-1}z = z \frac{\text{adj}(zI - A)}{\det(zI - A)}$

$$H(z) = CZ^{-1}\Phi(z)B + D = C(zI - A)^{-1}B + D$$

$$H(z) = CZ^{-1}\Phi(z)B + D = \frac{C\text{adj}(zI - A)B + \det(zI - A)D}{\det(zI - A)}$$

预解矩阵的极点同样是系统函数矩阵的极点。

- 当特征方程 $\det(zI - A) = 0$ 的根，即系统极点均位于 z 平面单位圆内部时，离散系统稳定。
- 对 $\det(zI - A)$ 列朱里表，当多项式满足朱里准则时系统稳定。
- 当系统函数矩阵在单位圆上收敛时，系统的频率响应矩阵为

$$H(e^{j\theta}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\theta}} = C(e^{j\theta}I - A)^{-1}B + D$$

■ 离散系统状态方程的 z 域求解

LTI离散系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k) \end{cases}$$

预解矩阵

$$\Phi(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$$

状态矢量

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{X}_{zi}(z) = \Phi(z)\mathbf{x}(0)} \\ \underline{\mathbf{X}_{zs}(z) = \Phi(z)z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}(z)} \end{cases}$$

和 $\mathbf{E}(z)$ 无关, 和 $\mathbf{x}(0)$ 有关

输出矢量

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{Y}_{zi}(z) = \mathbf{C}\Phi(z)\mathbf{x}(0)} \\ \underline{\mathbf{Y}_{zs}(z) = [\mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{E}(z)} \end{cases}$$

和 $\mathbf{E}(z)$ 有关, 和 $\mathbf{x}(0)$ 无关

系统函数矩阵

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

例题11 已知某离散因果系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(k), \quad \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

初始状态 $x_1(0)=1, x_2(0)=2$ ，输入 $e(k)=\varepsilon(k)$ ，求状态变量和输出。

解： $\Phi(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z-5 \end{bmatrix}^{-1}z = \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix}z$

$$\mathbf{X}(z) = \Phi(z) \left[\mathbf{x}(0) + z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}(z) \right] = \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z^2-5z & z \\ -6z & z^2 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z(z-2)}{(z-1)(z-3)} \\ \frac{z(2z-3)}{(z-1)(z-3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-3} \\ \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} + \frac{3}{2} \frac{z}{z-3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[1+3^k] \\ \frac{1}{2}[1+3^{k+1}] \end{bmatrix} \varepsilon(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[1+3^k] \\ \frac{1}{2}[1+3^{k+1}] \end{bmatrix} \varepsilon(k) = \begin{bmatrix} 1+2 \cdot 3^k \\ \frac{1}{2}[1-3^k] \end{bmatrix} \varepsilon(k)$$

8.5 系统的可控制性和可观测性

控制和观测的概念

系统的可控制性

系统的可观测性

■ 控制和观测的概念

在经典理论中，采用输入-输出法表述系统，即输出量通过微分方程或者差分方程直接与输入量相联系。此时，输出量被观测，且输出量受输入量控制。

在状态变量分析中，我们关心的是系统内部各状态变量的变化与输入之间的关系，即状态变量受系统输入控制，以及能够根据输出的观测值确定出系统的任一状态，即观测输出量来确定系统状态。这就是现代控制理论中的两个基本问题：系统的可控制性（Controllability）与可观测性（Observability）。

■ 系统的可控制性（Controllability）

状态的可控制性

系统在某种初始状态下，通过施加输入控制，使系统经过一段时间后在任意指定时刻的状态为零状态，则称该初始状态为系统的可控状态。

系统的可控制性

系统所有的可控制状态组成可控制状态空间，所有不可控制状态组成不可控制状态空间。分为完全可控制系统，部分可控制系统以及完全不可控制系统。为了简便处理，系统完全可控时，系统才可控。

系统的可控制性反映了输入对于系统内部状态的控制能力。

■ 系统的可控制性 (Controllability)

系统可控的含义

通过一定的激励，系统可以从任意的初始状态（不一定是零状态）过渡到任意的另一个状态。

系统可控的判定

常用可控制性矩阵来判定系统的可控制性。

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

系统可控的充要条件：可控性矩阵满秩，即 $\text{rank}[\mathbf{M}_C] = n$

■ 系统的可观测性 (Observability)

系统的可观测性

当系统用状态方程描述时，根据系统的输出唯一确定系统所有初始状态，则称系统完全可观测；若只能确定一部分状态，那么系统不完全可观测。

系统的可观测性指的是由系统的输出量来确定系统状态的能力。

系统可观测的判定

常用可观测性矩阵来判定系统的可观测性。

系统可控的充要条件：可控性矩阵满秩，即

$$\text{rank}[M_O] = n$$

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

例题12 给定两个连续系统a、b，其状态方程与输出方程分别为

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a1}(t) \\ x_{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a1}(t) \\ x_{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_b(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b1}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t), \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b1}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix}$$

试讨论这两个系统的可观测性与可控制性。

$$\text{a系统: } \mathbf{M}_C = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{b系统: } \mathbf{M}_C = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可观、可控

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

不可观、不可控

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger